Y Dios creo el mundo de la nada

José M. Méndez Pérez
Departamento de Análisis Matemático

Se trata de llamar la atención sobre los errores que se pueden cometer cuando los *conceptos* no están claros y sus *definiciones* no son suficientemente rigurosas y precisas

Se trata de llamar la atención sobre los errores que se pueden cometer cuando los *conceptos* no están claros y sus *definiciones* no son suficientemente rigurosas y precisas

$$\begin{aligned} + \quad : \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) &\rightsquigarrow s = a+b \end{aligned}$$

Se trata de llamar la atención sobre los errores que se pueden cometer cuando los *conceptos* no están claros y sus *definiciones* no son suficientemente rigurosas y precisas

$$
\begin{array}{cccl}
+ & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\
 & & (a,b) & \rightsquigarrow s = a + b
\end{array}
$$

La *operación suma* es asociativa

- $1+2+5=$

- $1+2+5=(1+2)+5$

- $1+2+5=(1+2)+5=3+5=8$

- $1+2+5=(1+2)+5=3+5=8$

$1+2+5+4=$

- $1+2+5=(1+2)+5=3+5=8$

$$1+2+5+4=[(1+2)+5]+4=$$

- $1+2+5=(1+2)+5=3+5=8$

$$1+2+5+4=[(1+2)+5]+4=\ [3+5]+4=$$

- $1+2+5=(1+2)+5=3+5=8$

$$1+2+5+4=[(1+2)+5]+4=[3+5]+4=8+4=12$$

- $1+2+5=(1+2)+5=3+5=8$

$$1+2+5+4=[(1+2)+5]+4=[3+5]+4=8+4=12$$

- $1-1+1-1=$

- $1+2+5=(1+2)+5=3+5=8$

  $1+2+5+4=[(1+2)+5]+4=[3+5]+4=8+4=12$

- $1-1+1-1=[(1-1)+1]-1=$

- $1+2+5=(1+2)+5=3+5=8$

$$1+2+5+4=[(1+2)+5]+4=[3+5]+4=8+4=12$$

- $1-1+1-1=[(1-1)+1]-1=1-[1+(1-1)]=$

- $1+2+5=(1+2)+5=3+5=8$

$$1+2+5+4=[(1+2)+5]+4=[3+5]+4=8+4=12$$

- $1-1+1-1=[(1-1)+1]-1=1-[1+(1-1)]=(1-1)+(1-1)=0$

- $1+2+5=(1+2)+5=3+5=8$

  $1+2+5+4=[(1+2)+5]+4=[3+5]+4=8+4=12$

- $1-1+1-1=[(1-1)+1]-1=1-[1+(1-1)]=(1-1)+(1-1)=0$

  $1-1+1-1+1=$

- $1+2+5=(1+2)+5=3+5=8$

$$1+2+5+4=[(1+2)+5]+4=[3+5]+4=8+4=12$$

- $1-1+1-1=[(1-1)+1]-1=1-[1+(1-1)]=(1-1)+(1-1)=0$

$$1-1+1-1+1=\{[(1-1)+1]-1\}+1=\cdots=$$

- $1+2+5=(1+2)+5=3+5=8$

$$1+2+5+4=[(1+2)+5]+4=[3+5]+4=8+4=12$$

- $1-1+1-1=[(1-1)+1]-1=1-[1+(1-1)]=(1-1)+(1-1)=0$

$$1-1+1-1+1=\{[(1-1)+1]-1\}+1=\cdots=1-(1-1)-(1-1)=1$$

- $1+2+5=(1+2)+5=3+5=8$

$$1+2+5+4=[(1+2)+5]+4=[3+5]+4=8+4=12$$

- $1-1+1-1=[(1-1)+1]-1=1-[1+(1-1)]=(1-1)+(1-1)=0$

$$1-1+1-1+1=\{[(1-1)+1]-1\}+1=\cdots=1-(1-1)-(1-1)=1$$

Pero qué ocurre con infinitos sumandos

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+1-1+\cdots$$

- Si procedemos como antes, aplicando la propiedad *asociativa*, se tiene

$$S=(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)\cdots=$$

- Si procedemos como antes, aplicando la propiedad *asociativa*, se tiene

$$S=(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)\cdots=0+0+0+\cdots=0$$

- Si procedemos como antes, aplicando la propiedad *asociativa*, se tiene

$$S = (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)\cdots = 0+0+0+\cdots = 0$$

- Por otra parte,

$$S = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-(1-1)\cdots = 1-0-0-0-\cdots = 1$$

- Si procedemos como antes, aplicando la propiedad *asociativa*, se tiene

$$S=(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)\cdots=0+0+0+\cdots=0$$

- Por otra parte,

$$S=1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-(1-1)\cdots=1-0-0-0-\cdots=1$$

- Luego,

$$0=1$$

- Si procedemos como antes, aplicando la propiedad *asociativa*, se tiene

$$S=(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)\cdots=0+0+0+\cdots=0$$

- Por otra parte,

$$S=1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-(1-1)\cdots=1-0-0-0-\cdots=1$$

- Luego,

$$0=1$$

Guido Grandi: Dios creo el Universo de la nada

- ***Luigi Guido GRANDI***: 1671–1742 (Italia) estudió en el colegio de los Jesuitas de Cremona e ingresó joven en una orden religiosa, la de los *Camaldoleses*, una rama de los *Benedictinos*. Fue profesor de teología y filosofía

- ***Luigi Guido GRANDI***: 1671–1742 (Italia) estudió en el colegio de los Jesuitas de Cremona e ingresó joven en una orden religiosa, la de los *Camaldoleses*, una rama de los *Benedictinos*. Fue profesor de teología y filosofía

- El primer empleo como *matemático* lo consiguió con el Gran Duque de Toscania, *Cosimo III de Medici* en 1707

- ***Luigi Guido GRANDI***: 1671–1742 (Italia) estudió en el colegio de los Jesuitas de Cremona e ingresó joven en una orden religiosa, la de los *Camaldoleses*, una rama de los *Benedictinos*. Fue profesor de teología y filosofía

- El primer empleo como *matemático* lo consiguió con el Gran Duque de Toscania, *Cosimo III de Medici* en 1707
- En 1707 visitó Inglaterra, dejando buena impresión. Fue elegido como *Fellow de la Royal Society*

- ***Luigi Guido GRANDI***: 1671–1742 (Italia) estudió en el colegio de los Jesuitas de Cremona e ingresó joven en una orden religiosa, la de los *Camaldoleses*, una rama de los *Benedictinos*. Fue profesor de teología y filosofía

- El primer empleo como *matemático* lo consiguió con el Gran Duque de Toscania, *Cosimo III de Medici* en 1707
- En 1707 visitó Inglaterra, dejando buena impresión. Fue elegido como *Fellow de la Royal Society*
- Hizo numerosos trabajos en geometría, hidráulica, mecánica y astronomía. Introdujo el *cálculo* de Leibniz en Italia

- En realidad, *Guido Grandi* lo que demostró fue que

$$0 = \frac{1}{2}$$

Para ello, puso $x = 1$ en el conocido desarrollo en serie

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

obteniendo

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

- En realidad, *Guido Grandi* lo que demostró fue que

$$0 = \frac{1}{2}$$

Para ello, puso $x = 1$ en el conocido desarrollo en serie

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

obteniendo

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

- Pero incluso genios de la talla de **LEIBNIZ**, Jacques **BERNOULLI** o **EULER** cayeron en errores de este tipo

- Así, Jacques **BERNOULLI** operando como sigue

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S \quad ,$$

dedujo que

$$S = 1 - S \quad ,$$

esto es,

$$S = \frac{1}{2}$$

- ¿Qué ocurre si se aplica la propiedad *conmutativa*? ¿Y si la mezclamos con la *asociativa*?

$$a_1 + a_2 + a_3$$

- ¿Qué ocurre si se aplica la propiedad *conmutativa*? ¿Y si la mezclamos con la *asociativa*?

$$a_1 + a_2 + a_3$$

- Permutaciones de $\{1, 2, 3\}$

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_3 + a_2 = a_3 + a_1 + a_2$$

$$a_2 + a_1 + a_3 = a_2 + a_3 + a_1 = a_3 + a_2 + a_1$$

- ¿Qué ocurre si se aplica la propiedad *conmutativa*? ¿Y si la mezclamos con la *asociativa*?

$$a_1 + a_2 + a_3$$

- Permutaciones de $\{1, 2, 3\}$

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_3 + a_2 = a_3 + a_1 + a_2$$
$$a_2 + a_1 + a_3 = a_2 + a_3 + a_1 = a_3 + a_2 + a_1$$

- Dada la *suma infinita* (SERIE)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

- ¿Qué ocurre si se aplica la propiedad *conmutativa*? ¿Y si la mezclamos con la *asociativa*?

$$a_1 + a_2 + a_3$$

- Permutaciones de $\{1, 2, 3\}$

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_3 + a_2 = a_3 + a_1 + a_2$$

$$a_2 + a_1 + a_3 = a_2 + a_3 + a_1 = a_3 + a_2 + a_1$$

- Dada la *suma infinita* (SERIE)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

- *Reordenación de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$$

donde $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es cualquier biyección

- Por ejemplo,

$$\begin{cases} f(4n+1) = 3n+1 \\ f(4n+3) = 3n+2 \\ f(2n+2) = 3n+3 \end{cases}$$

- Por ejemplo,
$$\begin{cases} f(4n+1)=3n+1 \\ f(4n+3)=3n+2 \\ f(2n+2)=3n+3 \end{cases}$$
-
$$\begin{aligned} S &= 1+1-1+1+1-1+1+1-1+\cdots+1+1-1+\cdots \\ &= (1+1-1)+(1+1-1)+(1+1-1)+\cdots+(1+1-1)+\cdots \\ &= 1+1+1+1+\cdots=+\infty \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} S &= 1-1-1+1-1-1+1-1-1+\cdots+1-1-1+\cdots \\ &= (1-1-1)+(1-1-1)+(1-1-1)+\cdots+(1-1-1)+\cdots \\ &= -1-1-1-1-\cdots = -\infty \end{aligned}$$

- $$S = 1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 - 1 + \cdots$$
  $$= (1 - 1 - 1) + (1 - 1 - 1) + (1 - 1 - 1) + \cdots + (1 - 1 - 1) + \cdots$$
  $$= -1 - 1 - 1 - 1 - \cdots = -\infty$$
- $$0 = \pm\infty$$

- $$S = 1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 - 1 + \cdots$$
  $$= (1 - 1 - 1) + (1 - 1 - 1) + (1 - 1 - 1) + \cdots + (1 - 1 - 1) + \cdots$$
  $$= -1 - 1 - 1 - 1 - \cdots = -\infty$$
- $$0 = \pm\infty$$
- $$0 = 1 \qquad (0 = \frac{1}{2})$$

- Concepto de *límite*

- Concepto de *límite*
- Sucesión. Sucesión convergente

- Concepto de *límite*
- Sucesión. Sucesión convergente
- Series. Sucesiones *sumables*, series convergentes

- Concepto de *límite*
- Sucesión. Sucesión convergente
- Series. Sucesiones *sumables*, series convergentes

- Concepto de *límite*

- Concepto de *límite*
- Sucesión. Sucesión convergente

- Concepto de *límite*
- Sucesión. Sucesión convergente
- Series. Sucesiones *sumables*, series convergentes

- Concepto de *límite*
- Sucesión. Sucesión convergente
- Series. Sucesiones *sumables*, series convergentes

- Bastante interesantes, afirmaba *EULER*, son las controversias sobre la serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, a cuya suma *LEIBNIZ* dio el valor $\frac{1}{2}$, aunque otros no estuvieron de acuerdo. Todavía nadie ha asignado otro valor a esa suma, y así la controversia se centra en si las series de este tipo tienen una cierta suma.

- Bastante interesantes, afirmaba *EULER*, son las controversias sobre la serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, a cuya suma *LEIBNIZ* dio el valor $\frac{1}{2}$, aunque otros no estuvieron de acuerdo. Todavía nadie ha asignado otro valor a esa suma, y así la controversia se centra en si las series de este tipo tienen una cierta suma.
- Entiendo que la cuestión radica en la palabra suma; esta idea así concebida tiene relevancia sólo para series convergentes, y deberíamos en general dejar esta idea de suma para series divergentes $\cdots$.