Una (simple) cuestión de escala

José C. Sabina de Lis

Universidad de La Laguna

La Laguna, 7 de noviembre de 2017

”Fisquitos” – Edición de 2017

La Laguna, noviembre de 2017

Plan.

- A. Planteamiento del problema
- B. La temperatura
- C. El tiempo de cocción.
- D. Una ecuación para la temperatura
- E. El cambio de escala
- F. Solución al problema

A. Planteamiento del problema.

El tiempo de cocción de un sólido (una pieza de carne):

$$\Omega \subset \mathbb{R}^3,$$

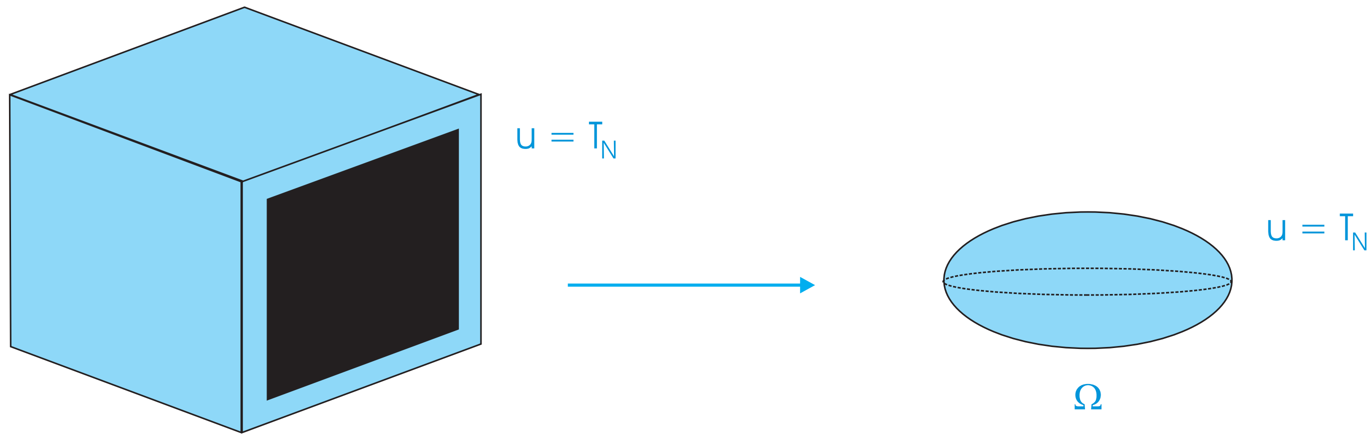
en un horno a temperatura:

$$u = T_H$$

es de

$$\boxed{t = t_C} \quad \text{minutos.}$$

- Para llegar a esa conclusión se dan los pasos siguientes.

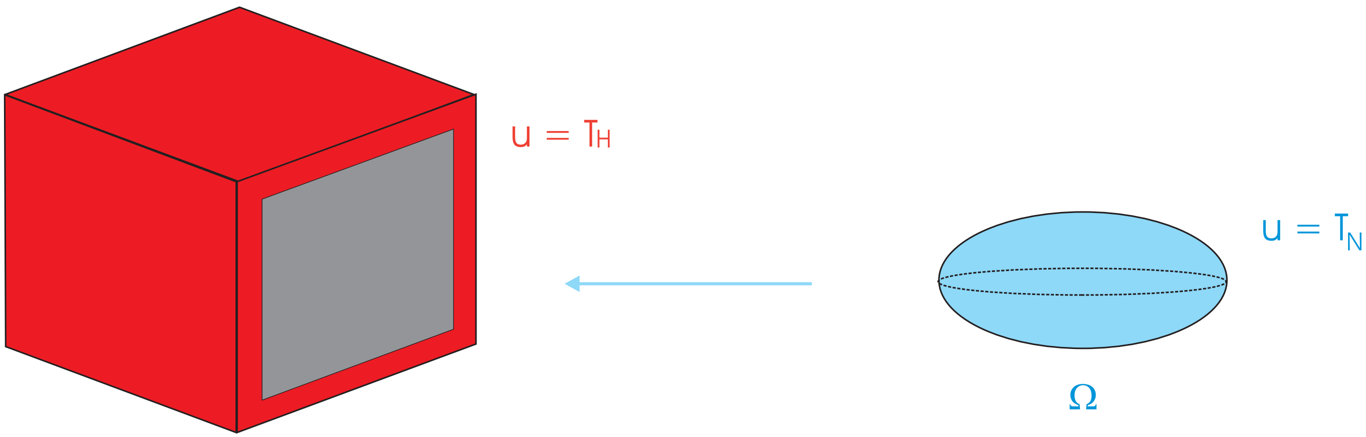


El sólido Ω se extrae de la nevera a temperatura

$$u = T_N.$$

Como el sólido es homogéneo, todos sus puntos se hallan a la misma temperatura:

$$u = T_N.$$

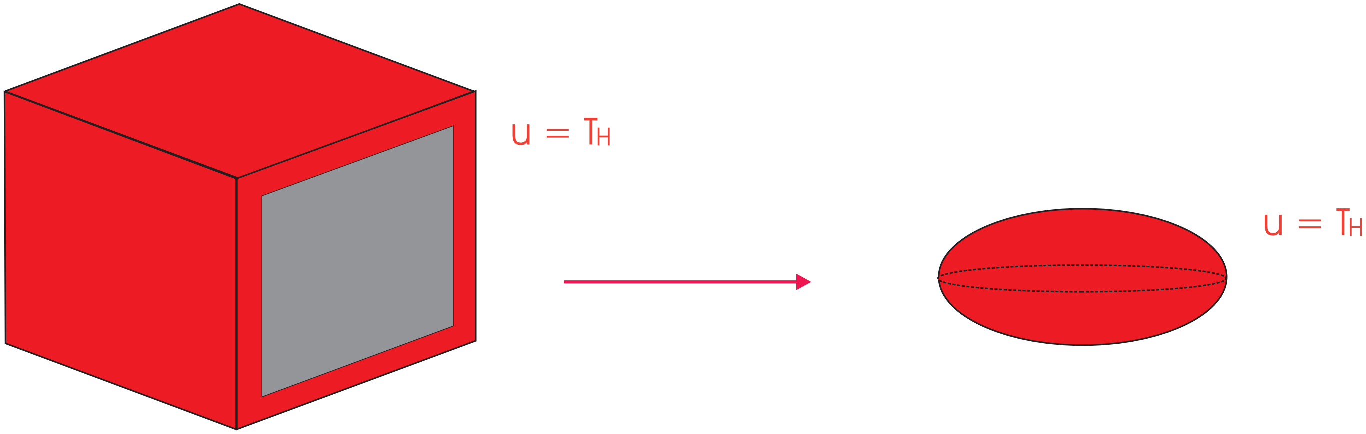


El sólido Ω se introduce en el horno, que ha sido precalentado a temperatura:

$$u = T_H,$$

obviamente:

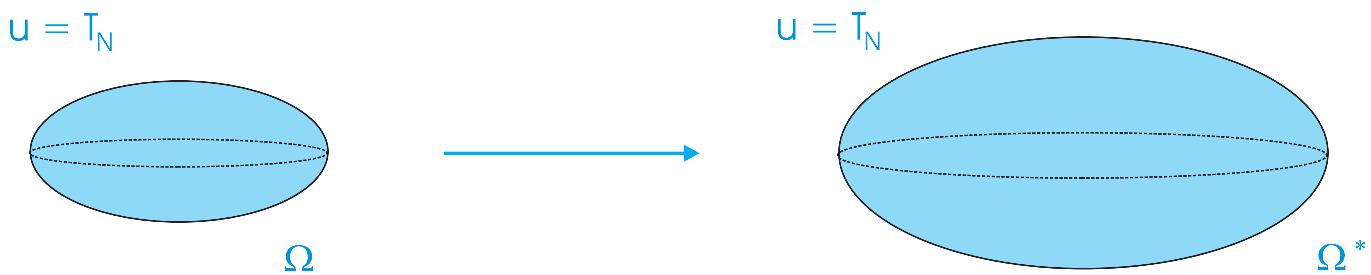
$$T_H >> T_N.$$



Tras repetir la experiencia numerosas veces con un sólido Ω del mismo material y peso, se observa que Ω ha alcanzado el grado adecuado de cocción tras:

$$\boxed{t = t_C}$$

minutos en el horno. Se retira entonces el sólido Ω, ya satisfactoriamente cocinado (¡en su punto!), del horno.



- Problema: ¿Cuál es el tiempo de cocción

$$\boxed{t = t^*_C},$$

de una pieza de carne Ω^* cuyo peso W^* es por ejemplo:

$$W^* = 2W,$$

es decir el doble del peso W de Ω?

B. La temperatura.

◦ La magnitud de referencia es la temperatura

$$u(x_1, x_2, x_3, t),$$

de Ω en el punto (x_1, x_2, x_3) y en el instante t.

B. La temperatura.

∘ La magnitud de referencia es la temperatura

$$u(x_1, x_2, x_3, t),$$

de Ω en el punto (x_1, x_2, x_3) y en el instante t.

∘ El calentamiento del sólido no es homogéneo ni en espacio ni en tiempo.

B. La temperatura.

∘ La magnitud de referencia es la temperatura

$$u(x_1, x_2, x_3, t),$$

de Ω en el punto (x_1, x_2, x_3) y en el instante t.

∘ El calentamiento del sólido no es homogéneo ni en espacio ni en tiempo.

∘ Las variaciones en u reflejan cómo la energía calorífica se propaga (es “conducida”) hacia el interior del sólido.

B. La temperatura.

∘ La magnitud de referencia es la temperatura

$$u(x_1, x_2, x_3, t),$$

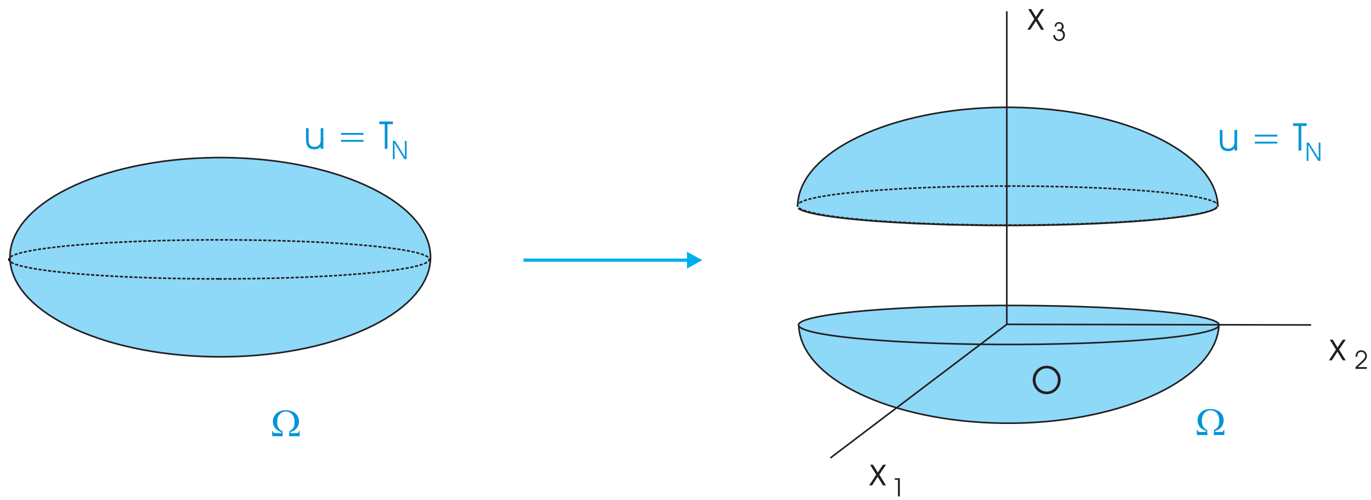
de Ω en el punto (x_1, x_2, x_3) y en el instante t.

∘ El calentamiento del sólido no es homogéneo ni en espacio ni en tiempo.

∘ Las variaciones en u reflejan cómo la energía calorífica se propaga (es “conducida”) hacia el interior del sólido.

∘ El sólido se va calentando a medida que el frente de calor se propaga hacia el interior. Como consecuencia, la temperatura del “núcleo” de Ω va aumentando paulatinamente.

C. El tiempo de cocción.

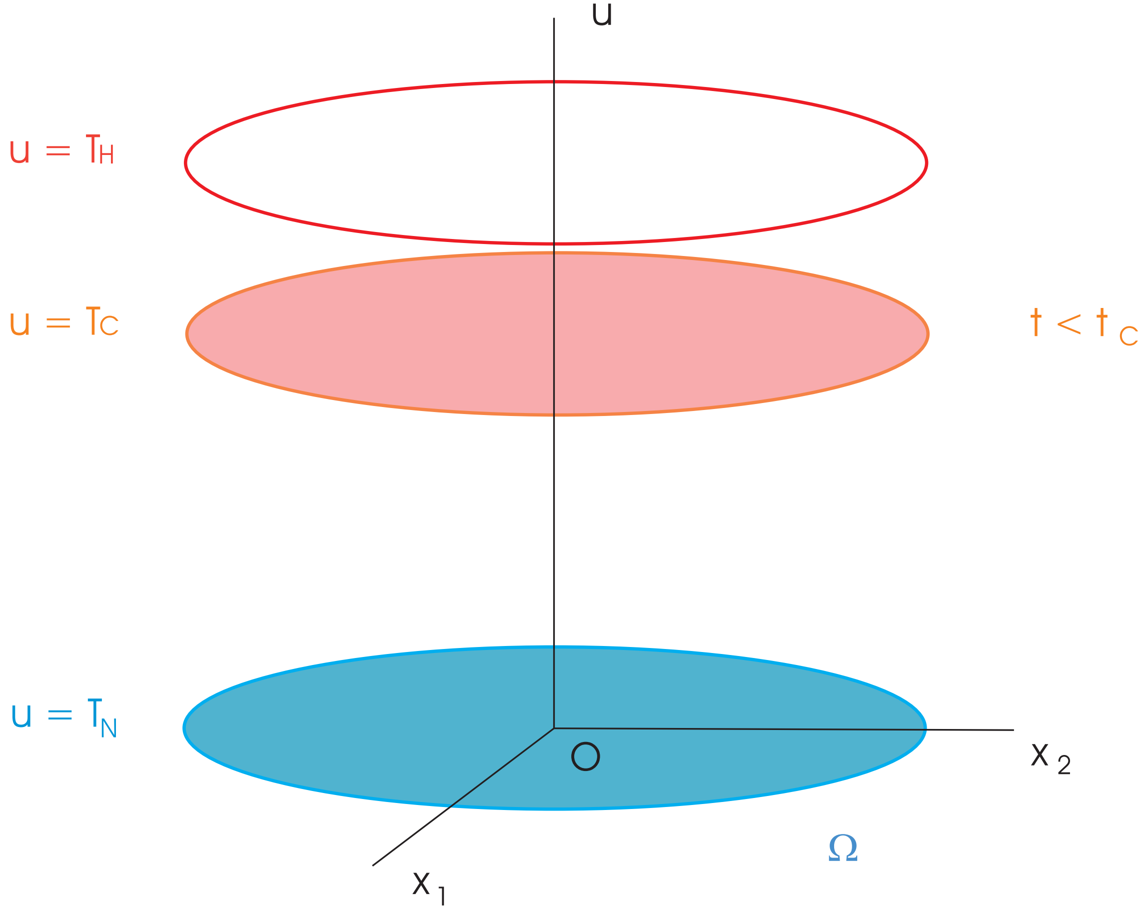


◦ Para definir el tiempo de cocción t_C tomamos una sección "central"

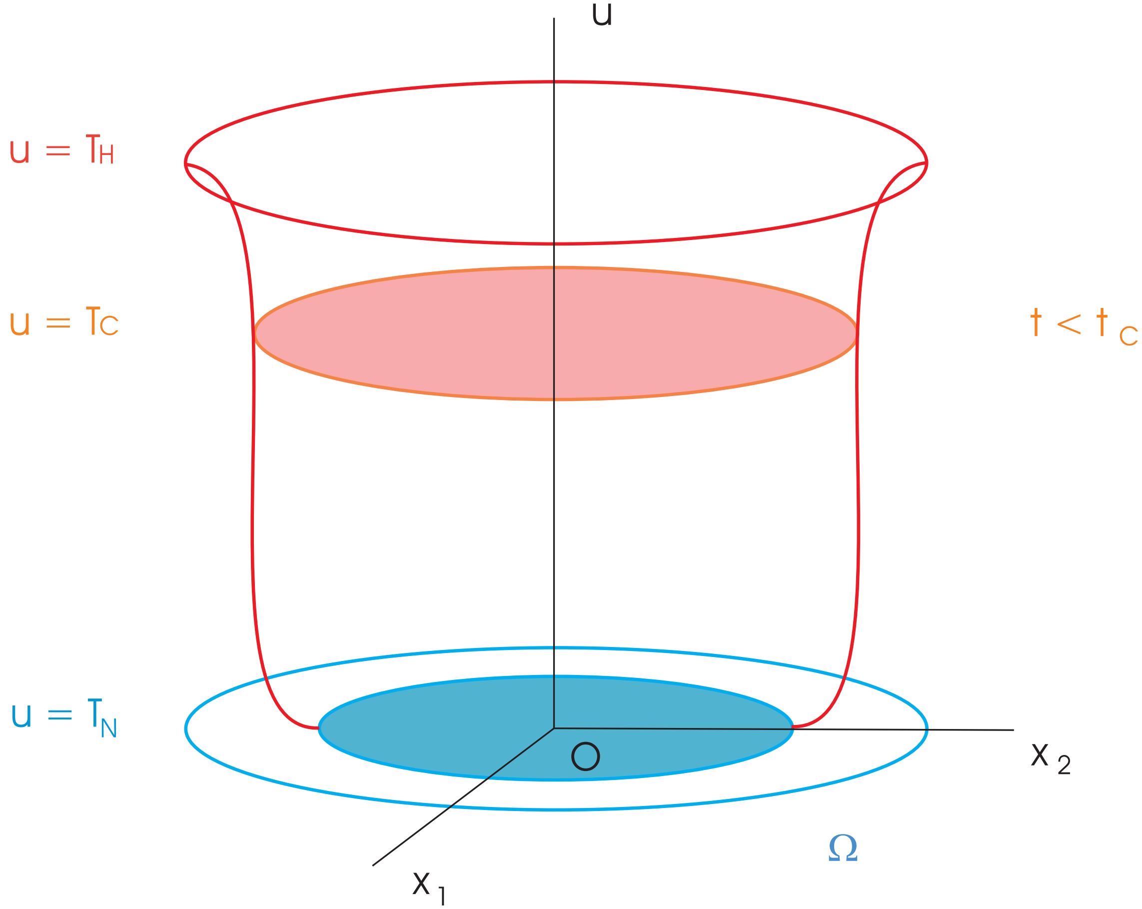
$$x_3 = 0,$$

de Ω, y seguimos la pista de la evolución de la temperatura en dicha sección:

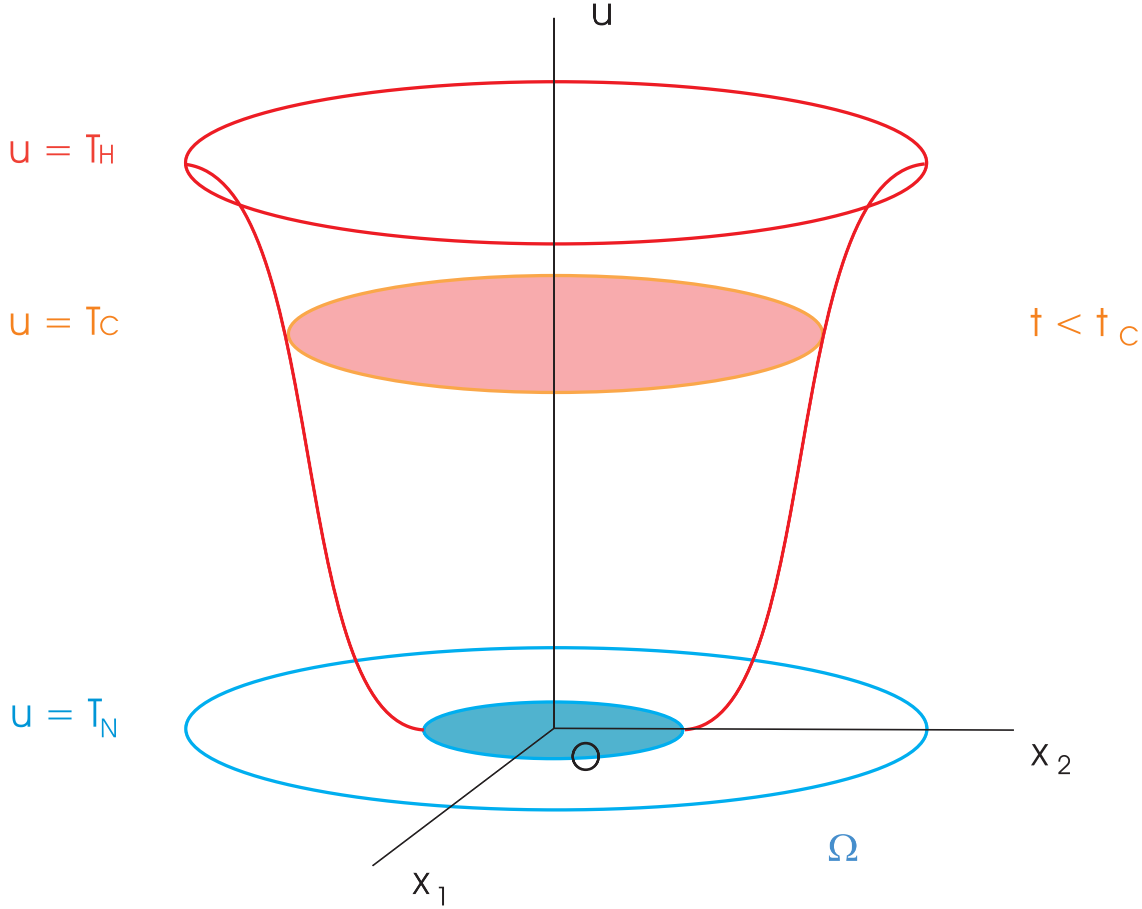
$$u(x_1, x_2, 0, t),$$



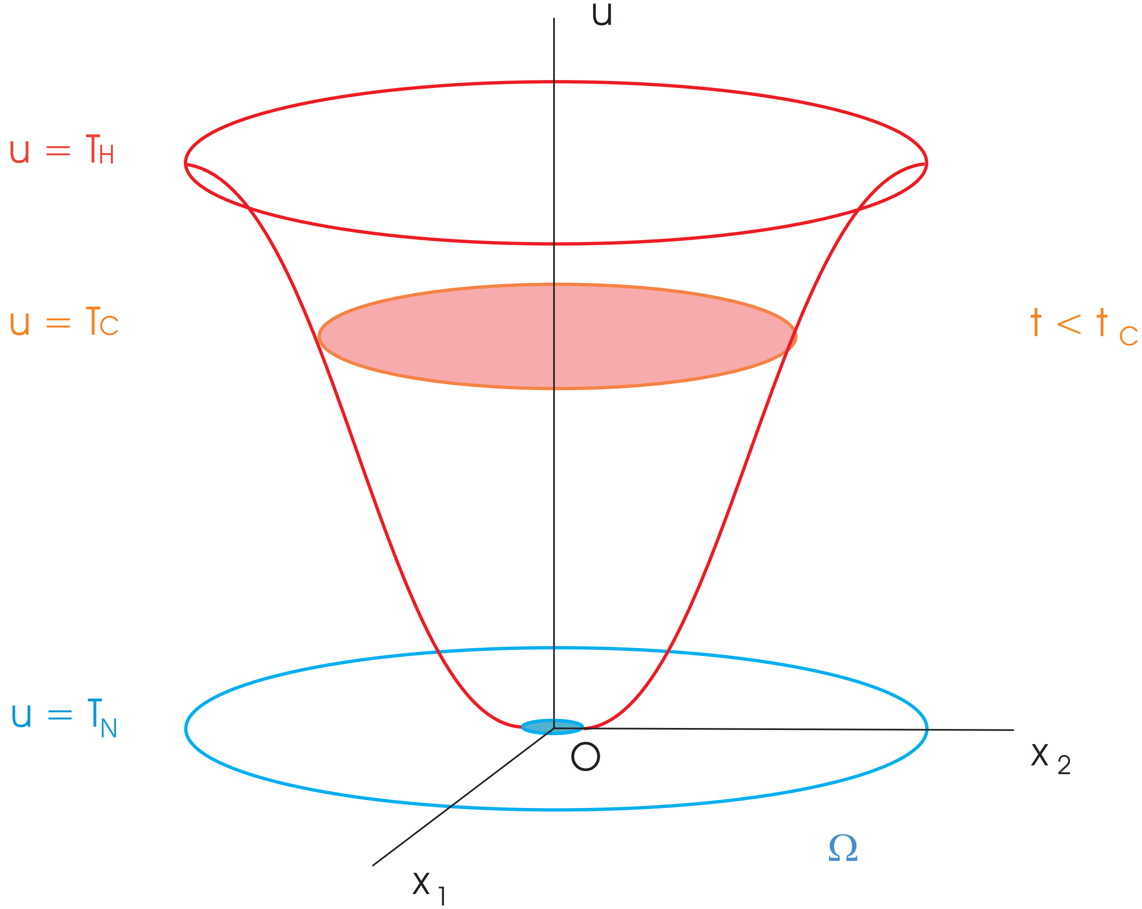
∘ Inicialmente $u(x_1, x_2, 0, 0) = T_N$, el contorno está a temperatura $u = T_H$.



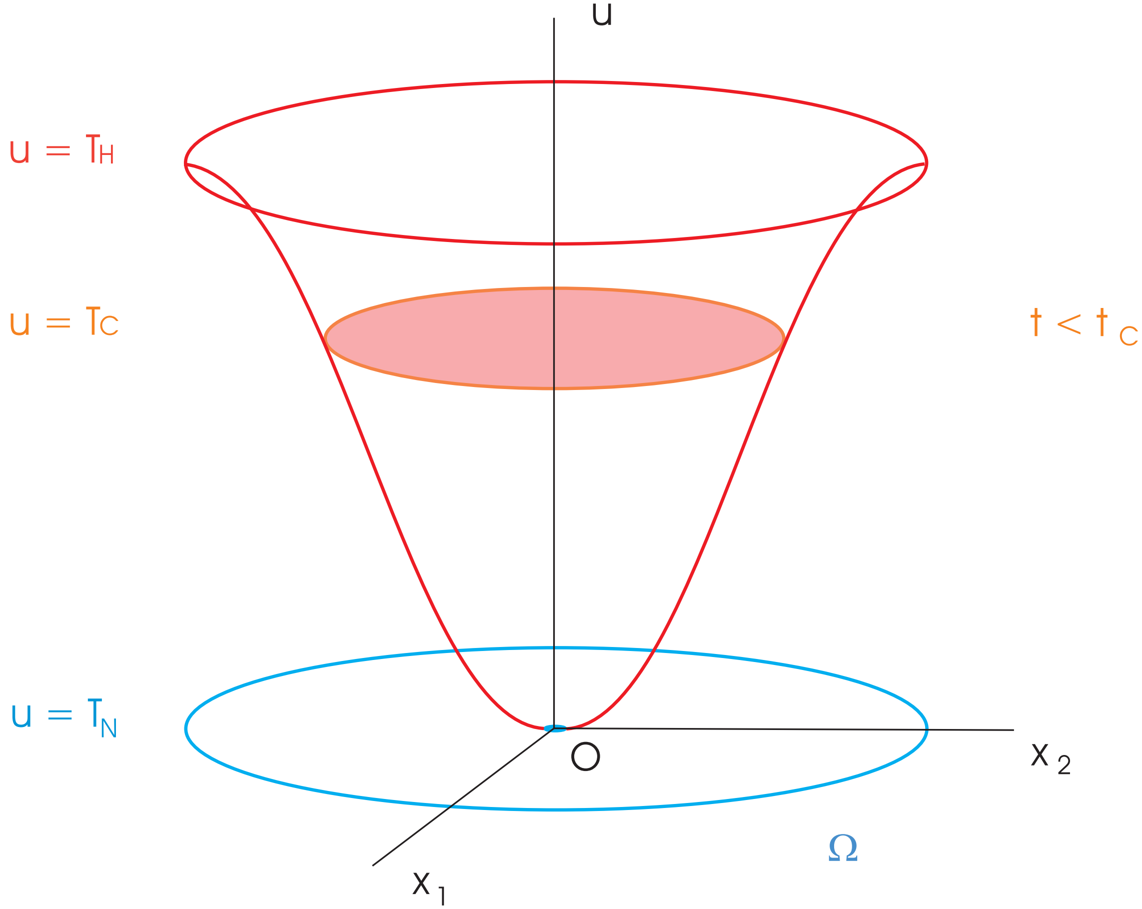
∘ El calor se propaga hacia el interior y va elevando el valor de la temperatura $u(x_1, x_2, 0, t)$ en la sección.



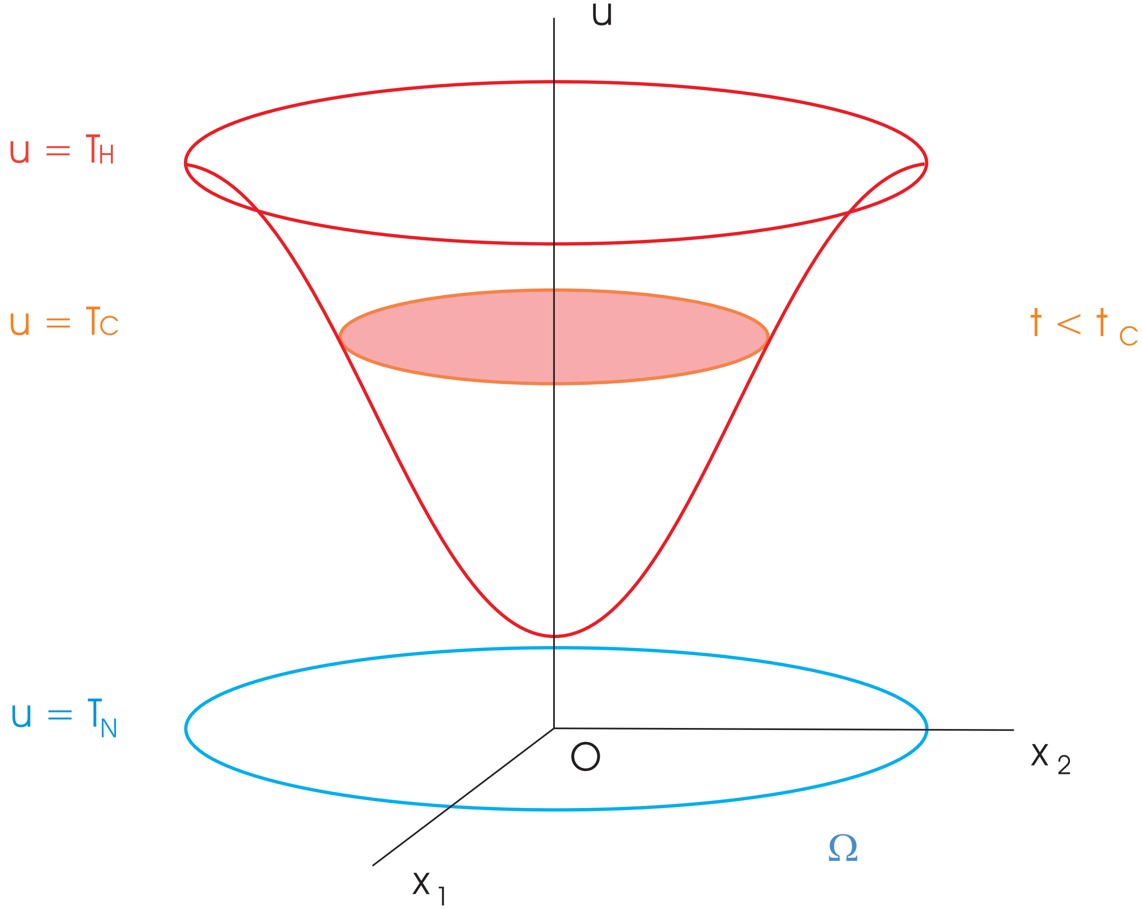
∘ El núcleo frío $u = T_N$ va remitiendo . . .



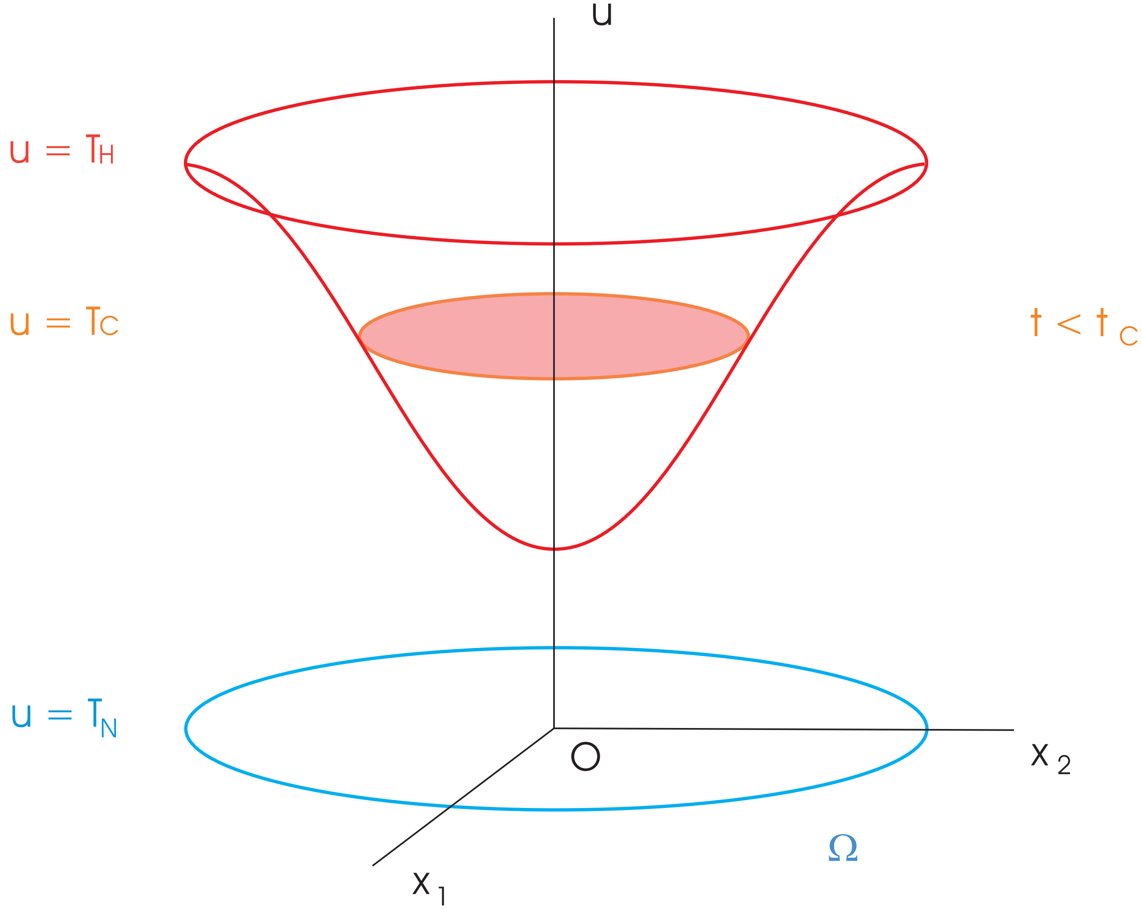
- poco a poco . . .



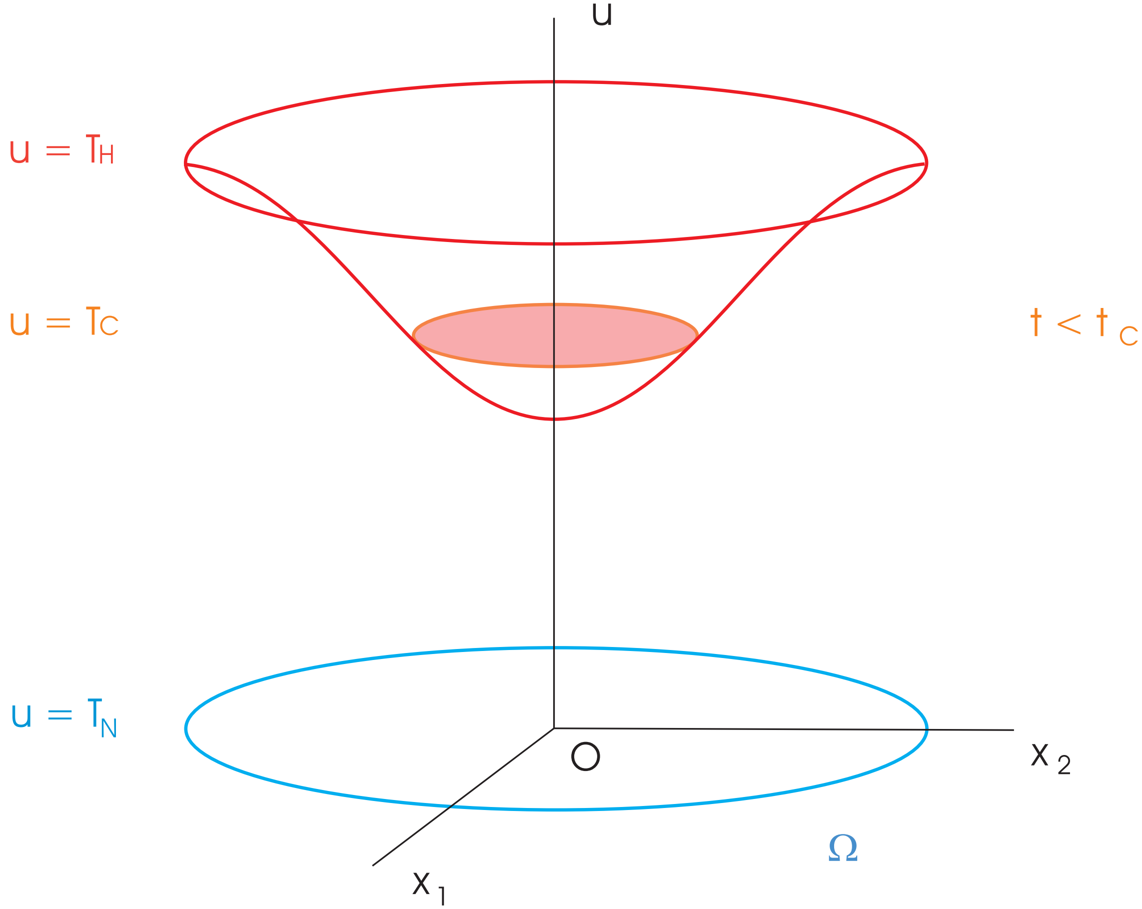
- hasta desaparecer. . .



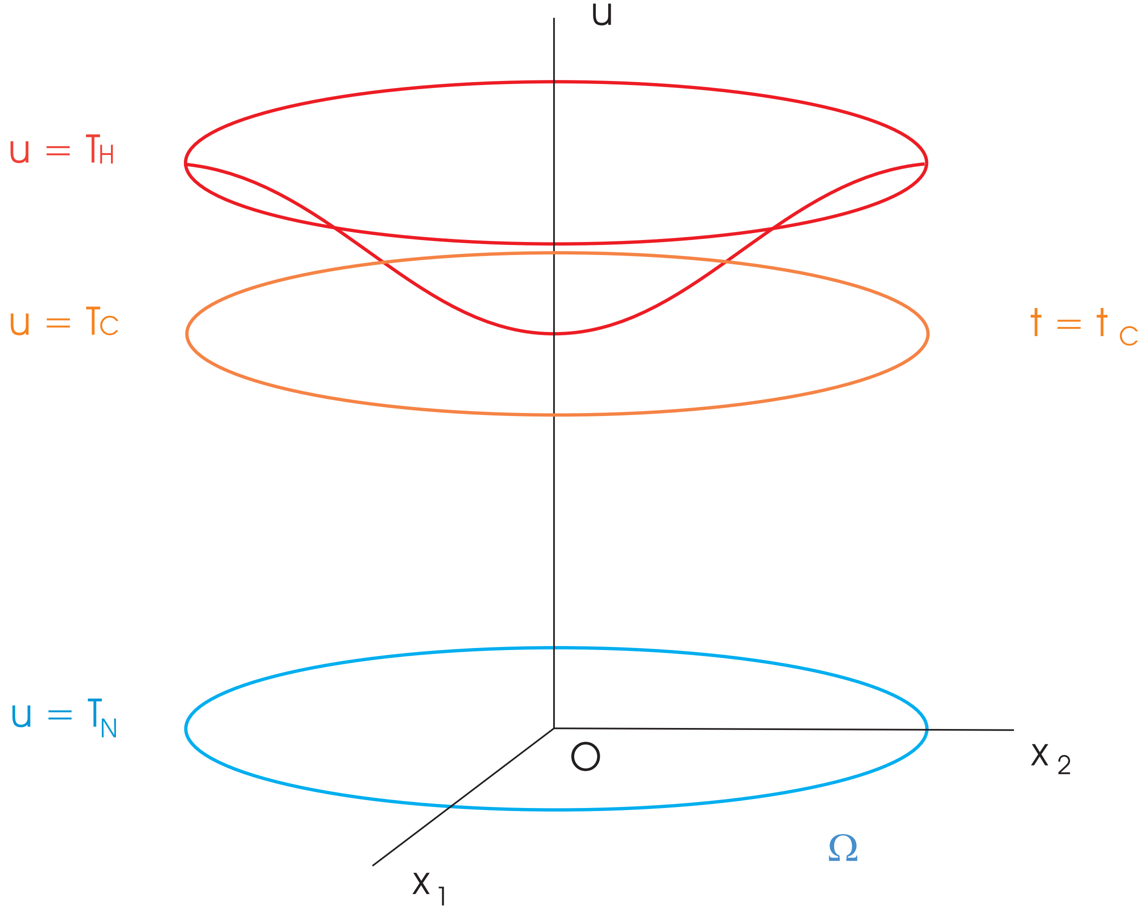
∘ La temperatura $u(\mathbf{O}, t)$ del origen $\mathbf{O}$ (“punto de referencia”) . . .



- continúa subiendo. . .



- y subiendo. . .



◦ . . . hasta que alcanza cierta temperatura característica T_C.

◦ Declaramos el tiempo de cocción $t = t_C$ como aquél para el que el punto $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ alcanza cierta temperatura característica T_C:

$$u(0, 0, 0, \boxed{t_C}) = \boxed{T_C}.$$

∘ <u>Declaramos</u> el tiempo de cocción $t = t_C$ como aquél para el que el punto $\mathbf{0} = (0,0,0)$ alcanza cierta temperatura característica T_C:

$$u(0,0,0,t_C) = T_C.$$

∘ ∘ T_C sólo depende del material.

∘ Declaramos el tiempo de cocción $t = t_C$ como aquél para el que el punto $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ alcanza cierta temperatura característica T_C:

$$u(0, 0, 0, t_C) = T_C.$$

∘ ∘ T_C sólo depende del material.

∘ ∘ ∘ El problema consiste entonces en hallar el tiempo $t = t_C^*$ para el que el sólido duplicado Ω^* alcanza la temperatura T_C en el punto $(0, 0, 0)$, es decir:

$$u^*(0, 0, 0, t_C^*) = T_C.$$

∘ Declaramos el tiempo de cocción $t = t_C$ como aquél para el que el punto $\mathbf{0} = (0,0,0)$ alcanza cierta temperatura característica T_C:

$$u(0,0,0,\boxed{t_C}) = \boxed{T_C}.$$

∘ ∘ $\boxed{T_C}$ sólo depende del material.

∘ ∘ ∘ El problema consiste entonces en hallar el tiempo $t = t_C^*$ para el que el sólido duplicado Ω^* alcanza la temperatura T_C en el punto $(0,0,0)$, es decir:

$$u^*(0,0,0,\boxed{t_C^*}) = \boxed{T_C}.$$

∘ ∘ ∘ ∘ ¿Cómo asociamos un campo $u(\mathbf{x}, t)$ de temperaturas al sólido Ω?

D. Una ecuación para la temperatura. A principios del siglo XIX, Joseph Fourier (1768–1830) postuló la ley que describe cómo se transvasa el calor en sólidos. El flujo de energía calorífica circula de zonas de alta a baja temperatura:

$$\Phi = -\kappa \nabla u \qquad \kappa = \text{conductividad térmica.}$$

∘ La conservación de la energía conduce entonces a la ecuación para la temperatura:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right\},$$

D = coeficiente de difusión.

∘ ∘ Ecuación del calor o de la difusión. Una de las ecuaciones más importantes en medios continuos.

Felix Klein (1849–1925).

◦ Distingue a la ecuación del calor como una de las tres ecuaciones de la “física matemática” (ecuación de las ondas, la ecuación de Laplace).

◦ Problemas de contorno.

◦ En nuestro sólido Ω el calor es transportado de acuerdo a la ley de Fourier bajo las condiciones T_N de la nevera y T_H del horno:

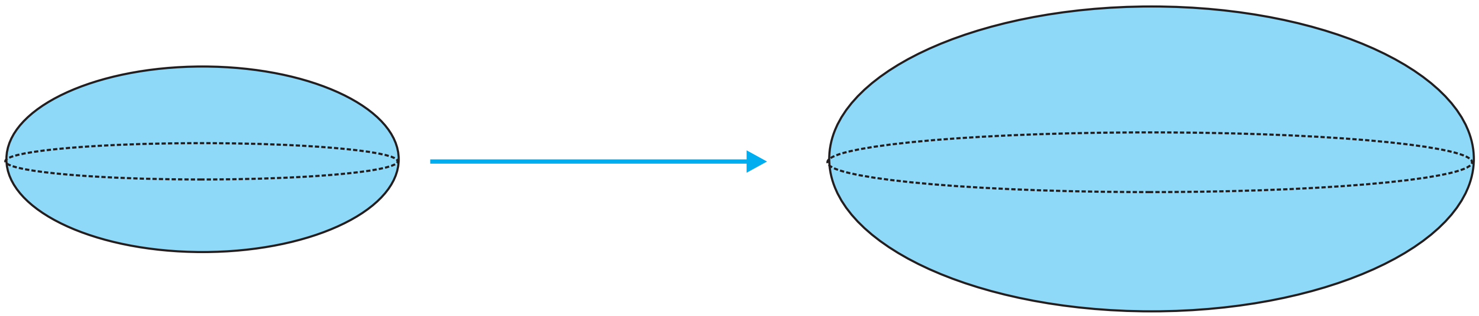
$$\begin{cases} u_t = D\Delta u & \mathbf{x} \in \Omega, \ \ t > 0 \\ u(\mathbf{x}, 0) = T_N & \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x}, t) = T_H & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \ \ t > 0, \end{cases}$$

◦ Lo mismo para el sólido duplicado Ω^*:

$$\begin{cases} {u^*}_t = D\Delta u^* & \mathbf{y} \in \Omega^*, \ \ t > 0 \\ u^*(\mathbf{y}, 0) = T_N & \mathbf{y} \in \Omega^* \\ u^*(\mathbf{y}, t) = T_H & \mathbf{y} \in \partial\Omega^*, \ \ t > 0. \end{cases}$$

E. Cambios de escala en x y t.

- Transformación de Ω a Ω^*:



$$\Omega \longrightarrow \Omega^* = \Omega_\lambda$$
$$x \longrightarrow y = \lambda x$$

es decir, una "homotecia" de razón λ.

- La homotecia define el <u>cambio de escala</u> en la variable espacial $\mathbf{x}$ de <u>factor</u> λ:

$$\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{y}{\lambda}.$$

- Para duplicar el volumen:

$$\text{vol } (\Omega^*) = \lambda^{3} \text{vol } (\Omega)$$

$$\lambda = \sqrt[3]{2}.$$

- En el caso general:

$$\lambda = \left(\frac{W^*}{W} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

- Sin embargo el cambio $x \to \dfrac{y}{\lambda}$ rompe la simetría y

$$u(x,t) \quad \to \quad u\left(\frac{\mathbf{y}}{\lambda}, t\right)$$

no resuelve la ecuación.

∘ Sin embargo el cambio $x \to \dfrac{y}{\lambda}$ rompe la simetría y

$$u(x,t) \quad \to \quad u\left(\frac{\mathbf{y}}{\lambda}, t\right)$$

no resuelve la ecuación.

∘ ∘ Hay que restituir el ‘‘equilibrio’’ promoviendo un ‘‘acuerdo’’ entre la escala de espacio y la de tiempo.


20

$$x \to \frac{y}{\lambda}$$

$$x \to \frac{y}{\lambda} \qquad \& \qquad t \to \frac{t}{\lambda^2}$$

∘ Restituido el balance resulta que:

$$u^*(\mathbf{y}, t) = u\left(\frac{\mathbf{y}}{\lambda}, \frac{t}{\boxed{\lambda^2}}\right),$$

es el campo de temperaturas del sólido Ω^*.

∘ ∘ En el contexto de esta charla:

Simple = ecuación del calor.

∘ La ecuación es “crucial” para determinar <u>cuál</u> es el cambio de escala “característico” en la variable tiempo.

F. Solución al problema.

∘ Calcular el "tiempo de cocción" para Ω^* se reduce a despejar t en la ecuación:

$$u^*(\mathbf{0}, t) = T_C \qquad \Leftrightarrow$$

$$u\left(\mathbf{0}, \frac{t}{\lambda^2}\right) = T_C \qquad \Rightarrow$$

$$t = \lambda^2 t_C \qquad \Rightarrow \qquad t_C^* = (\sqrt[3]{2})^2\ t_C \simeq 1'58\ t_C.$$

∘ En el problema "general":

$$\lambda = \left(\frac{W^*}{W}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

∘ Para un sólido (un "asado") N−dimensional Ω^* el tiempo de cocción es:

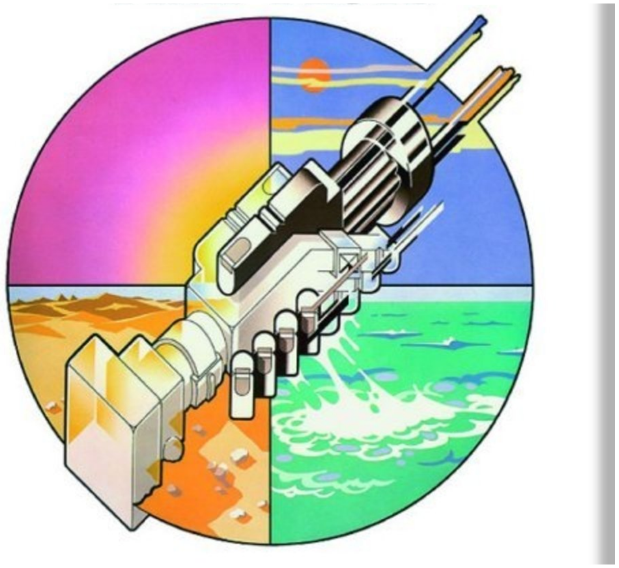
$$t_C^* = \left(\sqrt[N]{\frac{W^*}{W}} \right)^2 \; t_C.$$

SIAM Review
Vol. 3, No. 2, April, 1961

ON COOKING A ROAST[1]

Murray S. Klamkin[2]

In order to cook a roast "properly", the time of cooking is usually specified in many cookbooks to be proportional to the weight. Realizing that the latter criterion is not correct, some of the better cookbooks divide the roasts into large and small categories and then give the time per pound for each category. In this note, it is established, under certain general assumptions, that the "proper" time of cooking should be proportional to the two-thirds power of the weight.



Gracias por la atención.