¡Vámonos de Concierto Matemático!

Diana de las Nieves Sosa Martín

Departamento de Análisis Matemático

Área de Didáctica de la Matemática

Un Fisquito de Matemáticas

14 Noviembre 2019

Universidad de La Laguna

Alejandro Sanz
@AlejandroSanz

No es lo mismo... ♠

ALEJANDRO SANZ

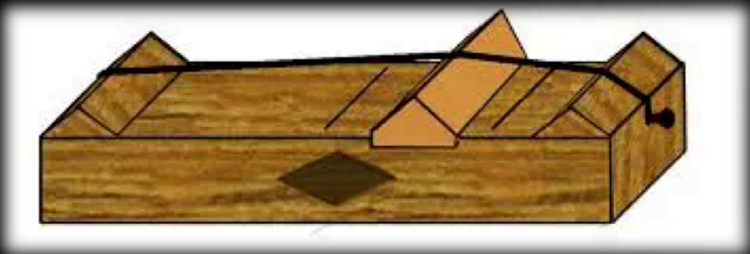
11:08 a. m. · 21 ago. 2017 · Twitter for iPhone

Pitágoras (s. VI a.C.)

Descubrió que al dividir la cuerda en ciertas **proporciones** se producían sonidos placenteros al oído, sonidos armónicos, por lo que la nota que emitía la cuerda dependía de la longitud de esta.

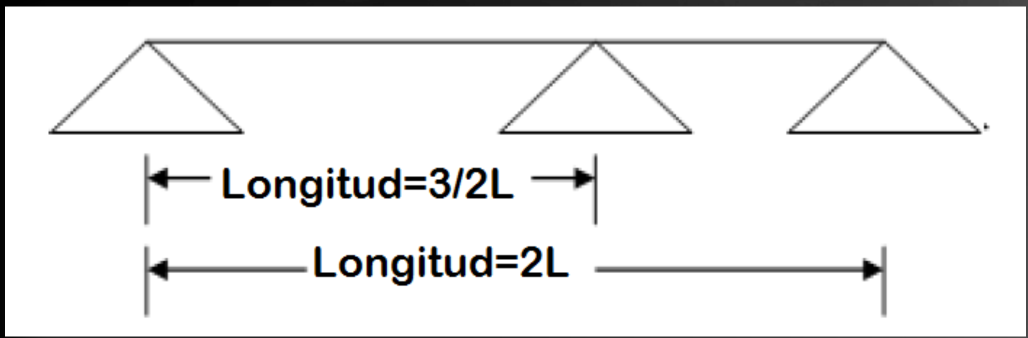
Pitágoras (s. VI a.C.)

Descubrió que al dividir la cuerda en ciertas **proporciones** se producían sonidos placenteros al oído, sonidos armónicos, por lo que la nota que emitía la cuerda dependía de la longitud de esta.



La altura de la nota y la longitud de la parte de cuerda son **inversamente proporcionales** (menor longitud más aguda)

Monocordio



Los sonidos de la escala musical se obtienen añadiendo quintas (3/2) a la nota inicial Do

Do: 1

Sol: 3/2

¿?: $3/2 \cdot 3/2 = 9/4 > 2 \Rightarrow$ dividimos por 2: $9/8 < 2 \Rightarrow$ Re

¿?: $9/8 \cdot 3/2 = 27/16 < 2 \Rightarrow$ La

¿?: $27/16 \cdot 3/2 = 81/64 < 2 \Rightarrow$ Mi

⋮

Los sonidos de la escala musical se obtienen añadiendo quintas (3/2) a la nota inicial Do

Do: 1

Sol: 3/2

¿?: $3/2 \cdot 3/2 = 9/4 > 2 \Rightarrow$ dividimos por 2: $9/8 < 2 \Rightarrow$ Re

¿?: $9/8 \cdot 3/2 = 27/16 < 2 \Rightarrow$ La

¿?: $27/16 \cdot 3/2 = 81/64 < 2 \Rightarrow$ Mi

⋮

Escala pitagórica

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

Los sonidos de la escala musical se obtienen añadiendo quintas (3/2) a la nota inicial Do

Do: 1

Sol: 3/2

¿?: $3/2 \cdot 3/2 = 9/4 > 2 \Rightarrow$ dividimos por 2: $9/8 < 2 \Rightarrow$ Re

¿?: $9/8 \cdot 3/2 = 27/16 < 2 \Rightarrow$ La

¿?: $27/16 \cdot 3/2 = 81/64 < 2 \Rightarrow$ Mi

⋮

Escala pitagórica

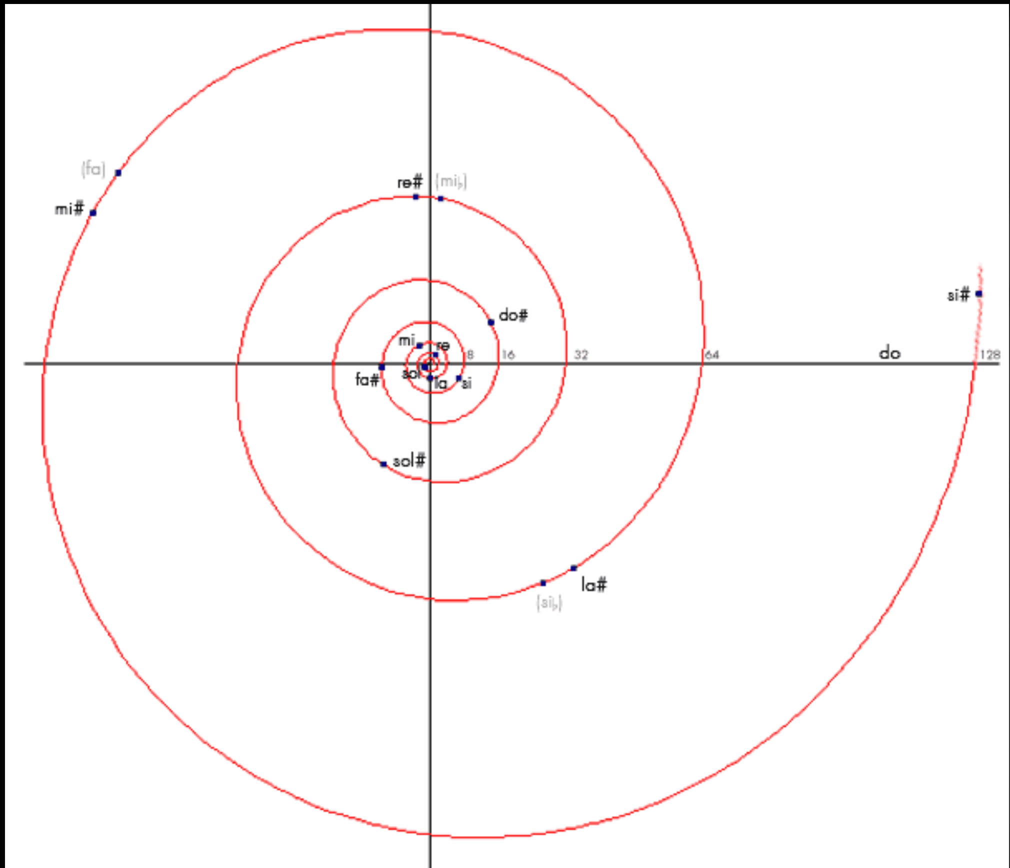
Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

9/8 9/8 256/243 9/8 9/8 9/8 256/243

5 Tonos: $9/8 = 1{,}125$ y 2 *Semitonos*: $256/243 = 1{,}0534\ldots$

Repitiendo el proceso hasta subir 12 quintas, se llega **casi** al sonido original **Do** pero 7 octavas más altas

Repitiendo el proceso hasta subir 12 quintas, se llega **casi** al sonido original **Do** pero 7 octavas más altas



$(3/2)^{1/2}=129{,}746\neq 2^7=128$

pero $(3/2)^{12}/2^7=1{,}013\approx 1$

Coma pitagórica

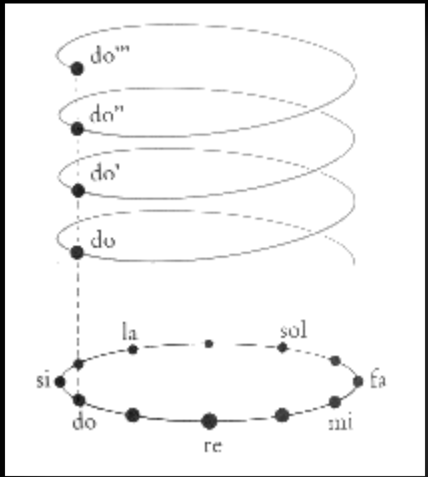
Espiral logarítmica

$r=2^{\theta}/2\pi$

$\theta=2\pi \log^2 r$

cada 2π se repite el mismo sonido

Escala temperada: todos los semitonos son idénticos



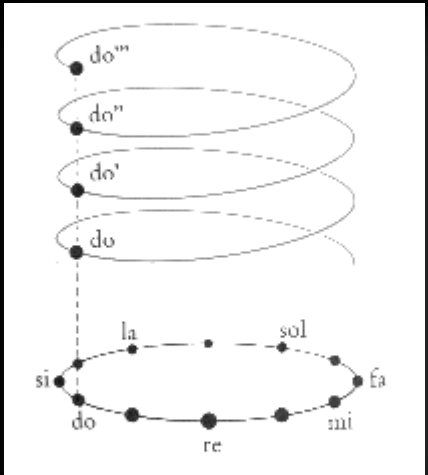
A partir del s. XVI …hasta el s.XVIII, Johann Sebastian Bach compone "El clave bien temperado"

Las relaciones de proporción f_n/f_{n-1} son iguales para todas las notas n

$$(f_n/f_{n-1})^{12}=2$$

$$f_n/f_{n-1}=\sqrt[12]{2}=1,05946\ldots$$

Escala temperada: todos los semitonos son idénticos



A partir del s. XVI …hasta el s.XVIII,
Johann Sebastian Bach compone
"El clave bien temperado"

Las relaciones de proporción f_n/f_{n-1} son iguales para todas las notas n

$$(f_n/f_{n-1})^{12}=2$$

$$f_n/f_{n-1} = \sqrt[12]{2}=1{,}05946\ldots$$

	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Escala temperada	1	1,1225	1,2599	1,3348	1,4983	1,6818	1,8877	2
Escala pitagórica	1	1,125	1,2656	1,3333	1,5	1,6875	1,8984	2

Simetrías

Rotaciones

Traslaciones

Número áureo Φ y la sucesión de Fibonacci :

- El clímax de muchas obras está en proporción áurea.
- Béla Bartok, músico húngaro de reconocimiento internacional, generó una escala sobre la base estructural de la serie de Fibonacci.

Theorem 3.3. *Let (Π, π) be a dynamical Lie algebroid epimorphism between E and E'. Then, we have that:*

(i) $\pi(Q_k) = Q'_k$ *and* $\Pi(E_k) = E'_k$, *for all* k.
(ii) *If* $x_k \in Q_k$, *then* $\pi^{-1}(\pi(x_k)) \subseteq Q_k$ *and* $Ker(\Pi_{|E_{x_k}}) \subseteq (E_k)_{x_k}$, *for all* k.
(iii) *If* $\pi_k : Q_k \to Q'_k$ *and* $\Pi_k : E_k \to E'_k$ *are the restrictions to* Q_k *and* E_k *of* $\pi : Q \to Q'$ *and* $\Pi : E \to E'$, *respectively, then the pair* (Π_k, π_k) *is a dynamical Lie algebroid epimorphism, for all* k.

Proof. The result holds for $k = 0, 1$. Then, we will proceed by induction.

Assume that the result holds for $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Then, we will prove it for $k = N + 1$.

Note that if $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ and $x_k \in Q_k$ then, using the following facts

$$(\Pi, \pi)^*\Omega' = \Omega, \quad \Pi((E_k)_{x_k}) = (E'_k)_{\pi(x_k)} \text{ and } \Pi(E_{x_k}) = E'_{\pi(x_k)},$$

we obtain that

$$\Pi((E_k)^{\perp}_{x_k}) = (E'_k)^{\perp}_{\pi(x_k)}. \tag{3.11}$$

Thus, proceeding as in the proof of Lemma 3.2, we deduce the result.


¡Muchas gracias por su atención!
Universidad de La Laguna