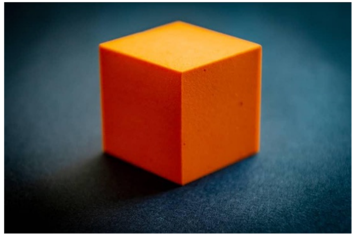
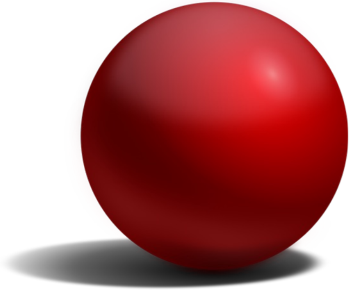
DE PANES Y PECES

por Javier Díaz Cabrera

¿QUÉ ES EL VOLUMEN?

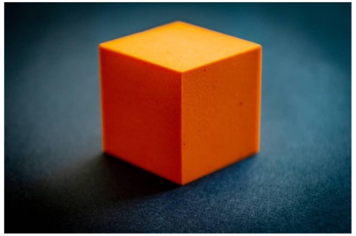


$$V = L.L.L = L^3$$

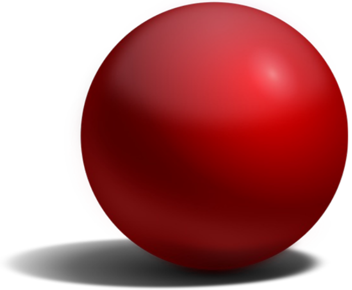


$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

¿QUÉ ES EL VOLUMEN?

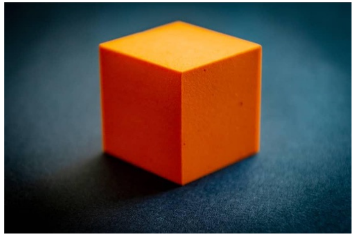


$$V = L.L.L = L^3$$

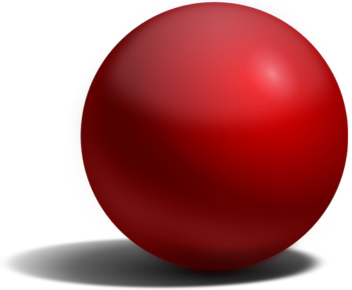


$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

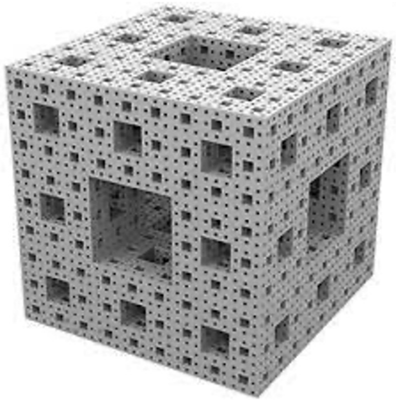
¿QUÉ ES EL VOLUMEN?



$$V = L.L.L = L^3$$



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



¿Qué debería cumplir un buen volumen?

¿Qué debería cumplir un buen volumen?

1) $V : \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \to [0, \infty]$

¿Qué debería cumplir un buen volumen?

1) $V : \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \to [0, \infty]$

2) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow V(A \cup B) = V(A) + V(B)$

¿Qué debería cumplir un buen volumen?

1) $V : \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \to [0, \infty]$

2) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow V(A \cup B) = V(A) + V(B)$

3) V es invariante por movimientos rígidos

¿Qué debería cumplir un buen volumen?

1) $V : \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \to [0, \infty]$

2) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow V(A \cup B) = V(A) + V(B)$

3) V es invariante por movimientos rígidos

4) $V(S^2) = \frac{4}{3}\pi$

Teorema de Banach-Tarski

Teorema de Banach-Tarski

Existen subconjuntos $E_1, ..., E_5$ *y* $F_1, ..., F_5$ *de* $\mathbb{R}^3$ *tales que*

1) E_i son disjuntos dos a dos. Lo mismo los F_i.

2) F_i es imagen de E_i por un movimiento rígido (para $i = 1, 2, 3, 4, 5$)

3) $\bigcup_{i=1}^{5} E_i = S^2$ *y* $\bigcup_{i=1}^{5} F_i$ es la unión de dos esferas disjuntas de radio 1

Teorema de Banach-Tarski

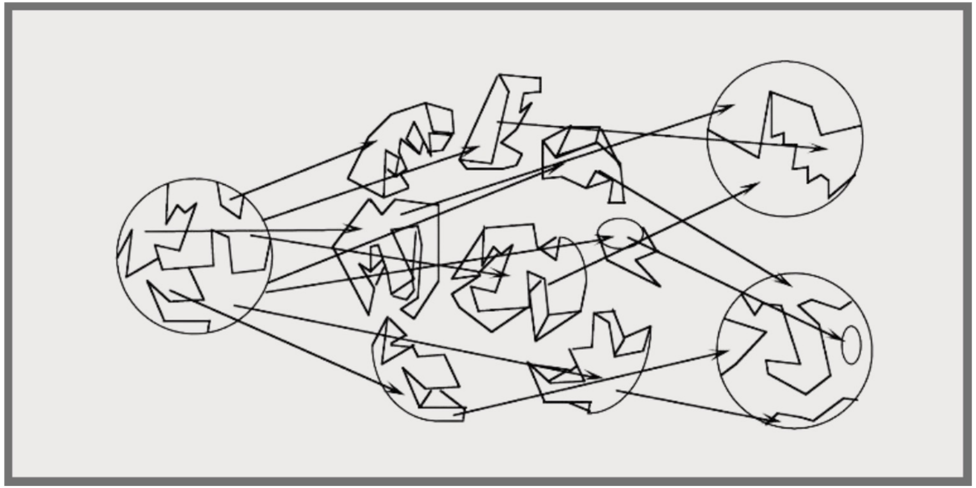
Existen subconjuntos $E_1, ..., E_5$ y $F_1, ..., F_5$ *de* $\mathbb{R}^3$ *tales que*

1) E_i son disjuntos dos a dos. Lo mismo los F_i.

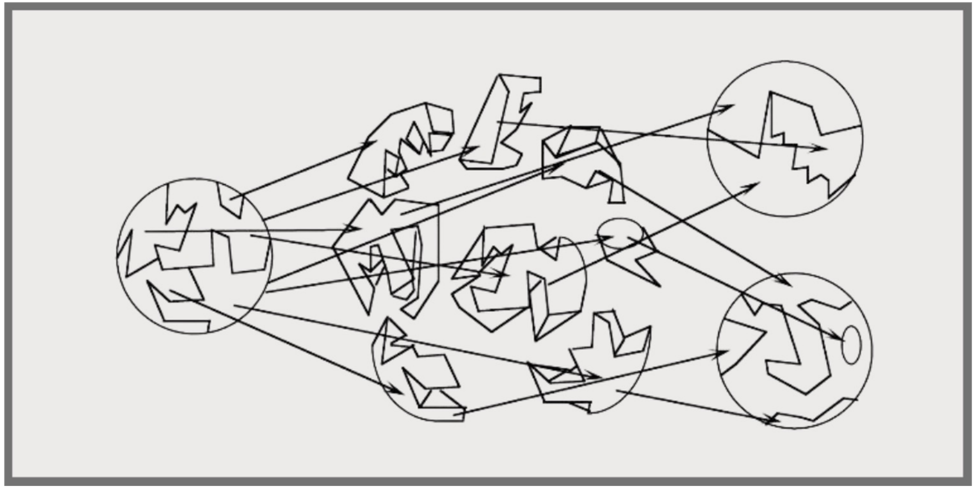
2) F_i es imagen de E_i por un movimiento rígido (para $i = 1, 2, 3, 4, 5$)

3) $\bigcup_{i=1}^{5} E_i = S^2$ y $\bigcup_{i=1}^{5} F_i$ es la unión de dos esferas disjuntas de radio 1

Teorema de Banach-Tarski



Teorema de Banach-Tarski



$$\frac{4}{3}\pi = V(E_1) + ... + V(E_5) = V(F_1) + ... + V(F_5) = \frac{8}{3}\pi \quad \#$$

¿REALMENTE ES VERDAD EL TEOREMA DE BANACH-TARSKI?

¡Si es un teorema debe ser verdad!

¿REALMENTE ES VERDAD EL TEOREMA DE BANACH-TARSKI?

¡Si es un teorema debe ser verdad!

Está demostrado, pero usando el *axioma de elección*

¿REALMENTE ES VERDAD EL TEOREMA DE BANACH-TARSKI?

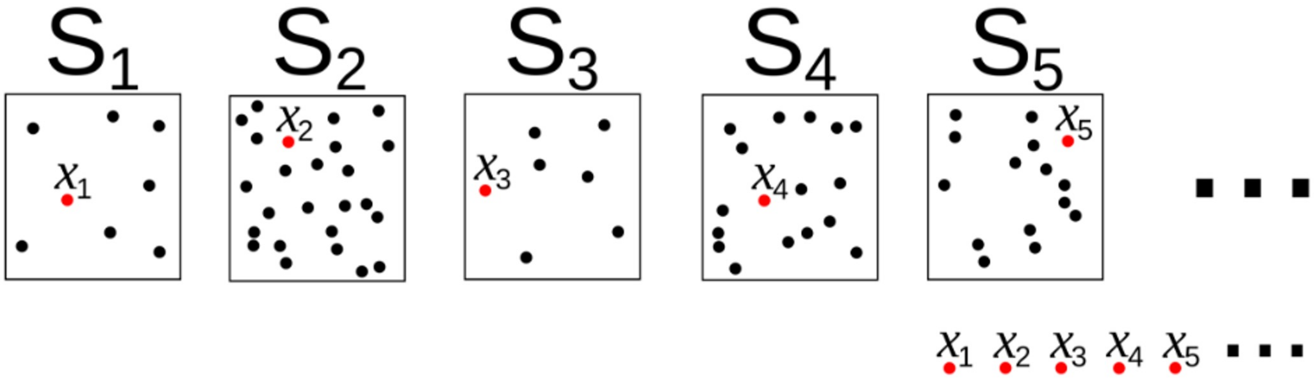
¡Si es un teorema debe ser verdad!

Está demostrado, pero usando el *axioma de elección*

¿REALMENTE ES VERDAD EL TEOREMA DE BANACH-TARSKI?

Axioma de elección

De toda colección infinita de conjuntos no vacíos siempre se puede elegir un elemento de cada uno



Entonces ¿Qué hacemos?

Tenemos 2 opciones

- Aceptar el teorema de Banach-Tarski
- Rechazar el axioma de elección

Entonces ¿Qué hacemos?

Tenemos 2 opciones

- Aceptar el teorema de Banach-Tarski
- Rechazar el axioma de elección

Entonces ¿Qué hacemos?

Tenemos 2 opciones

- Aceptar el teorema de Banach-Tarski 
- Rechazar el axioma de elección 

¿Qué propiedad debilitamos?

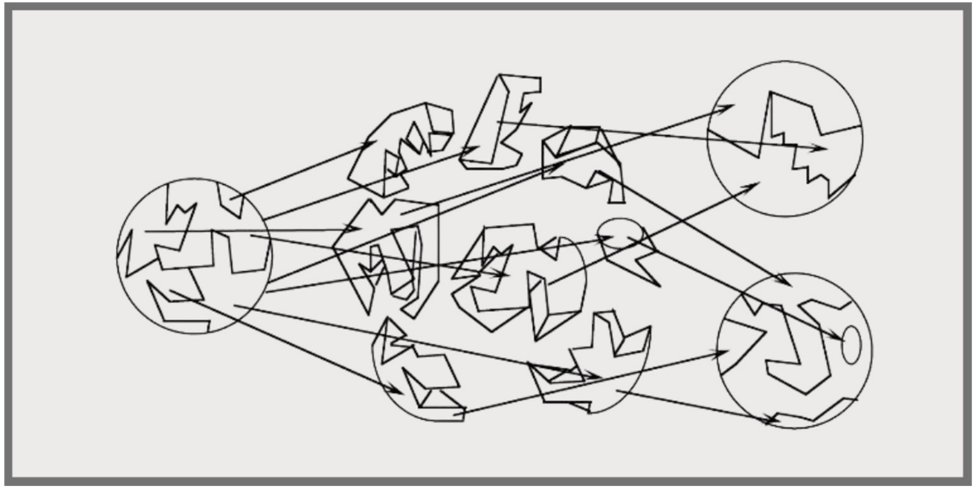
1) $V : \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \to [0, \infty]$

2) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow V(A \cup B) = V(A) + V(B)$

3) V es invariante por movimientos rígidos

4) $V(S^2) = \frac{4}{3}\pi$

Teorema de Banach-Tarski



$$\frac{4}{3}\pi = V(E_1) + ... + V(E_5) = V(F_1) + ... + V(F_5) = \frac{8}{3}\pi \quad \#$$

¡Ahora sí!

1) $V : \mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \to [0, \infty]$

2) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow V(A \cup B) = V(A) + V(B)$

3) V es invariante por movimientos rígidos

4) $V(S^2) = \frac{4}{3}\pi$

¡Muchas gracias!